

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 536.33

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-316-325>

Поступила в редакцию 15.12.2017

Received 15.12.2017

**А. П. Иванов***Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь*

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИК-ИЗЛУЧЕНИЯ ОТ НЕЛОКАЛЬНОГО ИСТОЧНИКА ВНУТРИ БИОЛОГИЧЕСКОЙ ТКАНИ

**Аннотация.** Неинвазивные термографические методы основаны на измерении ИК-излучения, которое исходит от ткани человека и по которому, используя закон Кирхгофа, восстанавливается температура исследуемого участка тела. Недостатком метода является то, что температурное изображение зашумлено тепловым влиянием слоя ткани, находящимся между изучаемым органом внутри среды и тепловизором, и это ухудшает качество рассматриваемого изображения. Используя данные о распределении температуры внутри биологической среды от точечного источника, получено выражение для температуры от источников разных форм. Изучено влияние разных факторов, влияющих на распределение приращения яркости на поверхности среды от источника в виде цилиндра. К ним относятся глубина залегания источника в среде, длина волны излучения, показатель поглощения, параметр теплоотдачи, высота и диаметр цилиндра. Дано сопоставление приращения яркости от источника и естественной яркости поверхности кожи. Показано, насколько яркость источника изменяет общую яркость поверхности в широком спектральном интервале.

**Ключевые слова:** температура, теплопроводность, яркость, формула Планка, тепловизор, термография, биоткань

**Для цитирования.** Иванов, А. П. Распределение ИК-излучения от нелокального источника внутри биологической ткани / А. П. Иванов // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 3. – С. 316–325. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-316-325>

**A. P. Ivanov***B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*

## DISTRIBUTION OF IR RADIATION FROM A NON-LOCAL SOURCE INSIDE THE BIOLOGICAL TISSUE

**Abstract.** Non-invasive thermographic methods are based on the measurement of IR radiation from human tissue and, by which using Kirchhoff's law, it restores the temperature of the examined body region. The disadvantage of this method is that the temperature image is noisy due to the thermal influence of the tissue layer between the organ under study inside the medium and the thermal imager. This degrades the quality of the image under consideration. Using the data on the temperature distribution inside the biological medium from a point source, the expression for the temperature from different-shape sources was obtained. The influence of various factors on the brightness increment distribution at the medium surface from a source shaped as a cylinder is studied. These include the source depth in the medium, the radiation wavelength, the absorption index, the heat transfer parameter, the cylinder height and diameter. The brightness increment from the source and the natural brightness of the skin surface are compared. It is shown how the source brightness changes the full brightness of the surface in a wide spectral interval.

**Keywords:** temperature, thermal conductivity, brightness, Planck's formula, thermal imager, thermography, biological tissue

**For citation.** Ivanov A. P. Distribution of IR radiation from a non-local source inside the biological tissue. *Vestsi Natsyional'noi akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 3, pp. 316–325 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-316-325>

**Введение.** Термографические методы на основе ИК-изображений в настоящее время активно внедряются в медицинскую практику с целью диспансерных обследований, ранней диагностики заболеваний, при проведении клинических процедур и хирургических операций. Суть методов заключается в снятии тепловых изображений открытой поверхности биоткани пациента и вынесении заключения, например о воспалительной патологии внутренних участков, протекающей

с повышением температуры обследуемого органа, или о дистрофической патологии, когда температура понижена. Само тепловое изображение определяется по излучению, выходящему из среды, с использованием закона Кирхгофа. Несмотря на очевидные достоинства такого подхода, одним из его слабых мест является то, что тепловые изображения снимаются только с поверхности биологических тканей. Изображения зашумлены тепловым влиянием слоя ткани, находящейся между обследуемым органом и тепловизором и, следовательно, лишь косвенно несут информацию о температурном режиме внутренних органов. В связи с этим представляет интерес вопрос, насколько структура излучения, порожденная источником тепла, искажается на поверхности среды. В настоящей работе на основе решения теплофизической задачи с точечным источником тепла [1] рассмотрена задача о поле ИК-излучения в биологической среде, порожденном тепловым источником конечных размеров.

**Теплофизические и оптические характеристики среды.** Рассматривается кожный покров в виде полубесконечной плоскопараллельной среды. На поверхности параметр теплоотдачи  $h = H/\kappa$ ,  $\text{см}^{-1}$ ;  $H$ ,  $\text{Вт}/(\text{см}^2\cdot\text{К})$  – поток тепла с единицы поверхности при  $T_s - T_a = 1,0$  К, где  $T_s$  и  $T_a$  – температуры соответственно поверхности ткани и окружающей среды. Поток  $H$  включает обмен энергией вследствие излучения, конвекции и испарения. Коэффициент теплопроводности для биоткани  $\kappa = 0,004 - 0,006$   $\text{Вт}/(\text{см}\cdot\text{К})$ . Типичные значения  $h$  изменяются в пределах  $0,05 - 0,5$   $\text{см}^{-1}$  [2, 3].

При распространении излучения в среде следует учитывать такие ее характеристики, как поглощение и рассеяние. Известно, что кожный покров примерно на 70–90 % состоит из воды. И хотя в ткани кожи есть и другие компоненты, но именно показатель поглощения воды  $k_w$  в рассматриваемой спектральной области 2–12 мкм превалирует над остальными хромофорами. Спектр  $k_w$  в рассматриваемом интервале длин волн  $\lambda$  приведен в таблице. Ниже для конкретности будем считать, что объемная концентрация воды в коже  $C_v = 0,8$ , так что показатель поглощения ткани  $k = C_v k_w$ .

С ростом  $\lambda$  показатель поглощения воды в целом увеличивается, а рассеяния – уменьшается. Поскольку поглощение излучения в рассматриваемой спектральной области во много раз больше рассеяния, последним при исследовании поля излучения будем пренебрегать и полагать, что

**Значения показателя поглощения воды и относительной чувствительности  
одного из приемников в ИК-области спектра (по данным [4])**

**Water absorption index and the relative sensitivity of one of the IR receivers (according to [4])**

$\lambda$ , мкм	$k_w$ , $\text{см}^{-1}$	$S$	$\lambda$ , мкм	$k_w$ , $\text{см}^{-1}$	$S$
2,0	69,12	0,24	3,7	122,27	–
2,1	26,93	–	3,8	112,44	–
2,2	16,51	–	3,9	122,44	–
2,3	22,4	–	4,0	144,51	0,38
2,4	50,06	–	4,5	374,0	0,31
2,5	90,48	0,20	5,0	312,0	0,29
2,6	153,21	–	5,25	238,0	–
2,65	317,72	–	5,5	265,0	0,39
2,7	884,3	–	5,75	520,0	–
2,75	2696,1	–	6,0	2241,0	0,42
2,8	5161,2	–	6,5	758,0	0,46
2,85	8157,1	–	7,0	574,0	0,68
2,9	11613,0	–	7,5	546,0	0,78
3,0	11394,0	0,25	8,0	539,0	0,87
3,1	7783,1	–	9,0	557,0	0,98
3,15	5385,6	–	9,5	585,0	1,0
3,2	3628,6	–	10,0	638,0	0,73
3,25	2358,6	–	10,5	792,0	0,56
3,3	1401,3	–	11,0	1106,0	0,35
3,4	720,72	–	11,5	1552,0	0,03
3,5	337,5	0,3	12,0	2084,0	0
3,6	179,77	–	–	–	–

распространение теплового излучения в ткани описывается экспоненциальным законом Бугера:  $\exp(-kl)$ , где  $l$  – расстояние между двумя рассматриваемыми точками. Таким образом, с точностью до множителя  $1 - r_0$  ( $r_0$  – коэффициент отражения излучения при нормальном падении на границу раздела кожа – воздух) среда является абсолютно черным телом.

**Поле температур в биоткани с внутренним источником тепла.** Излучение в близкой инфракрасной области спектра формируется естественным нагревом организма и патологическими процессами, протекающими в нем. Будем основываться на известных аналитических решениях уравнения теплопроводности. Положим температуру в среде в цилиндрической системе координат  $(z, r, \varphi)$ , равной

$$T(z, r) = T_s + \Delta T(z, r), \quad (1)$$

где  $T_s$  – температура поверхности при отсутствии источников тепла,  $\Delta T(z, r)$  – добавка к температуре вследствие различных причин на глубине  $z$  и радиусе  $r$ . В ходе рассмотрения осесимметричной задачи здесь и далее координата  $\varphi$  не присутствует. При отсутствии источника, по аналогии с [5], полагаем, что добавка к температуре в среде для нормальной работы организма описывается формулой

$$\Delta T_1(z) = hz(T_s - T_a) + T_s. \quad (2)$$

При наличии точечного источника с тепловой мощностью  $Q$ , Вт на глубине  $a$ , имеющего в цилиндрической системе координаты  $z = a, r = 0$ , согласно [1]  $\Delta T$  возрастет на величину

$$\Delta T_p(z, r) = \Delta T_{p1}(z, r) + \Delta T_{p2}(z, r), \quad (3)$$

где

$$\Delta T_{p1}(z, r) = \frac{Q}{4\pi k} \left\{ \left[ (z-a)^2 + r^2 \right]^{-1/2} - \left[ (z+a)^2 + r^2 \right]^{-1/2} \right\}, \quad (4)$$

$$\Delta T_{p2}(z, r) = \frac{Q}{2\pi k} \int_0^\infty \frac{\exp[-p(a+z)] p J_0(pr)}{p+h} dp, \quad (5)$$

$J_0$  – функция Бесселя нулевого порядка,  $r, z$  – координаты точки наблюдения.

Таким образом, при точечном источнике температура в любой точке биологической среды есть

$$T_p(z, r) = T_s + \Delta T_1(z) + \Delta T_p(z, r). \quad (6)$$

Естественно, что точечный источник практически нельзя реализовать. Однако данные по температуре, полученные с ним, можно использовать для расчета температуры от источников разных форм. Любой источник можно рассматривать как совокупность элементарных точечных источников тепла. В линейной оптической системе изображение такого объекта (на языке температур) может быть получено суперпозицией изображений отдельных точечных источников, характеризующихся функцией (6). В теории видения эта функция называется функцией размытия (рассеяния) точки. Выделим в источнике произвольной формы и объема  $V$  в цилиндрической системе координат бесконечно малый элементарный объем  $dV = r^* dr^* dz^* d\varphi$ , имеющий координаты  $r^*, z^*, \varphi$ . Положим, что он создает в пространстве распределение температуры, описываемое формулой (3).

По отношению к этому элементарному объему в (3) заменим  $a$  на  $z^*$ ,  $r$  на  $l = \sqrt{(r - r^* \cos \varphi)^2 + (r^* \sin \varphi)^2}$  (поскольку система инвариантная), а  $Q$  – на произведение объемной плотности тепловой мощности рассматриваемого источника  $q$  на элементарный объем  $dV$ . Тогда приращения температуры, отнесенные к элементарному объему, будут

$$D = D_1 + D_2. \quad (7)$$

Здесь

$$D_1 = \frac{q}{4\pi k} \left\{ \left[ (z - z^*)^2 + l^2 \right]^{-1/2} - \left[ (z + z^*)^2 + l^2 \right]^{-1/2} \right\}, \quad D_2 = \frac{q}{2\pi k} \int_0^\infty \frac{\exp[-p(z^* + z)] p J_0(pl)}{p+h} dp. \quad (8)$$

Очевидно, приращение температуры от всего объема источника будет

$$\Delta T = \int_V D dv. \quad (9)$$

Для выполнения операции (9) необходимо задать уравнение поверхности рассматриваемого источника и в трехмерном интеграле подставить соответствующие пределы. Можно рассмотреть источник не в виде объема, а поверхности или линии. Тогда нужно выделить бесконечно малую площадку или отрезок линии и положить, что они создают температуру, как точка (см. (3)). Для получения конечного результата необходимо провести операцию интегрирования по всей рассматриваемой поверхности или линии. Остановимся на модели формы патологического участка с повышенной температурой в виде цилиндра, ось которого перпендикулярна поверхности биологической ткани. Для цилиндра диаметром  $d$  и высотой  $z_0$  приращение температуры будет

$$\Delta T_c = 2 \int_0^{0,5d} r^* \left\{ \int_{a-0,5z_0}^{a+0,5z_0} \left[ \int_0^\pi D d\varphi \right] dz^* \right\} dr^*. \quad (10)$$

При малых  $z_0$  или  $d$  выражение (10) обращается соответственно в

$$\Delta T_c^z = 2z_0 \int_0^{0,5d} r^* \left[ \int_0^\pi D d\varphi \right] dr^*, \quad (11)$$

$$\Delta T_c^d = d \int_{a-0,5z_0}^{a+0,5z_0} \left[ \int_0^\pi D d\varphi \right] dz^*. \quad (12)$$

По аналогии с точечным источником температура в любой точке биологической среды с цилиндрическим источником есть

$$T_c(z, r) = T_s + \Delta T_1(z) + \Delta T_c(z, r). \quad (13)$$

В дальнейшем будем везде полагать  $q$  постоянным в любой точке источника.

**Яркость излучения в биоткани с цилиндрическим источником тепла.** Спектральная плотность яркости монохроматического излучения, испускаемого поверхностью ткани по нормали к ней при пространственном распределении температуры  $T(z, r)$  в цилиндрической системе координат  $\{r, \varphi, z\}$ , равна

$$B(\lambda, r) = \frac{(1-r_0)}{\pi} \int_0^\infty k E(z, r, \lambda, T) \exp(-kz) dz. \quad (14)$$

Здесь в рассматриваемом спектральном интервале 2–12 мкм в приближении низкой температуры человеческого организма

$$E(z, r, \lambda, T) = M(\lambda) \exp(-N(\lambda)/T) \quad (15)$$

– спектральная плотность светимости поверхности (формула Планка) в точке  $(z, r)$ , где  $M(\lambda) = 3,75 \cdot 10^3 \lambda^{-5}$ , эрг · мкм<sup>-3</sup> · с<sup>-1</sup>,  $N(\lambda) = 1,44 \cdot 10^4 \lambda^{-1}$ , длина волны  $\lambda$  в мкм, температура  $T(z, r)$  описывается формулой (13). Предполагается, что выходящее излучение диффузное. Можно получить более наглядное и упрощенное выражение, чем (14). Добавим и вычтем в (1)  $\Delta T_c(0, r)$ , которое представляет собой приращение температуры поверхности среды вследствие наличия цилиндрического источника. Тогда (1) примет вид

$$T(z, r) = T_s^* + \Delta T(z, r)^*, \quad (16)$$

где  $T_s^* = T_s + \Delta T_c(0, r)$  – температура поверхности при наличии в среде источника тепла,  $\Delta T(z, r)^* = \Delta T_1(z) + \Delta T_c(z, r) - \Delta T_c(0, r)$ . Если  $T_s^* \gg \Delta T(z, r)^*$ , то разлагаем функцию Планка в ряд Тейлора при  $T = T_s^*$ , и она равна

$$E(T) = E(T_s^*) \left( 1 + N \Delta T^* / T_s^{*2} \right). \quad (17)$$

Для наглядности в (17) многие аргументы, от которых зависит светимость, не указаны. В этом случае формула (14) обратится в

$$B(T) = B(T_s^*)^* \left[ 1 + (N / T_s^{*2}) \int_0^\infty k \Delta T^* \exp(-kz) dz \right]. \quad (18)$$

Здесь  $B(T_s^*)^* = \frac{(1-r_0)}{\pi} E(T_s^*)$  – спектральная плотность яркости поверхности по формуле Планка в предположении постоянной температуры тела, с температурой  $T_s^*$ .

При отсутствии источника фоновая спектральная плотность яркости  $B_0(\lambda)$ , рассчитанная по (14), не будет зависеть от  $r$ . Если говорить о приращении спектральной плотности яркости поверхности, то

$$\Delta B(\lambda, r) = B(\lambda, r) - B_0(\lambda). \quad (19)$$

Как показывают расчеты, в реальных условиях можно считать  $\Delta B(\lambda, r)$  пропорциональным  $q$ . Если глубина погружения источника в среду много больше его размеров, то приращение яркости от него пропорционально  $Q$ . В дальнейшем для упрощения чтения в большинстве случаев спектральную плотность яркости или светимости будем заменять словом «яркость» или «светимость».

**Приемники ИК-излучения.** Чувствительных приемников в рассматриваемой спектральной области нет. Для увеличения отношения сигнал/шум, как правило, используются приемники, регистрирующие излучение в широком спектральном интервале [6]. Для конкретности рассмотрим детектор на основе  $\text{Cd}_{1-x}\text{Hg}_x\text{Te}$  [7]. Его спектральная чувствительность  $S$  в относительных единицах представлена в таблице. Видно, что приемник чувствителен в области 2–11 мкм с максимумом в зоне 9,5 мкм. Регистрируемый от кожи электрический сигнал при наличии источника, с точностью до постоянного множителя (характеризующего абсолютную чувствительность), равен

$$\beta(r) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} B(\lambda, r) S(\lambda) d\lambda. \quad (20)$$

Здесь указан интервал длин волн  $\lambda_2 - \lambda_1$ , в котором чувствителен приемник;  $B(\lambda, r)$  описывается формулой (14). Можно записать аналогичное выражение для сигнала без источника  $\beta_0$ . Приращение сигнала  $\Delta\beta(r) = \beta(r) - \beta_0$ .

Интересно выяснить, в каком спектральном интервале сосредоточена основная часть регистрируемой приемником мощности излучения от кожного покрова. Была проведена оценка. Рассматривался случай ткани без источника тепла. Определялся сигнал в области максимальной чувствительности приемника. Затем расширялся спектральный интервал измеряемой области до размера, в котором сосредоточено 90 % величины максимального сигнала. Оказалось, что такой спектральный интервал находится между длинами волн 6,52–11,5 мкм.

Полученный материал позволяет быстро проводить численные расчеты на персональном компьютере и анализировать закономерности распределения энергетических полей излучения в биоткани. Несмотря на то что ИК-приемники регистрируют излучение в достаточно широком спектральном интервале, анализ в основном будем осуществлять с монохроматической яркостью, которая, с одной стороны, служит основой для понимания формирования интегральной яркости, а с другой, надо полагать, со временем появятся и чувствительные монохроматические приемники. Проиллюстрируем влияние разных факторов на яркость поверхности ткани.

**Спектральное распределение яркости на поверхности кожи.** Оценим, насколько яркость источника изменяет общую яркость поверхности в точке  $r = 0$  в широком спектральном интервале. Это видно из рис. 1, *a*, на котором сплошная линия характеризует обычную яркость тела, а пунктирные – яркость при наличии источника при разных  $a$  и  $h$ . Рис. 1, *b* дает более детальную картину приращения яркости в полулогарифмическом масштабе. Начиная с  $\lambda > 4$  мкм наблюдается прямолинейное нарастание  $B$ , однако рост  $\Delta B$  постепенно замедляется. Это свидетельствует о том, что с увеличением длины волны доля приращения яркости монотонно уменьша-

ется. Действительно, в данном случае в спектральном интервале 2–9 мкм, когда источник находится на поверхности, при  $h = 0,05 \text{ см}^{-1}$ , отношение  $\Delta B(\lambda)/B_0(\lambda)$  изменяется от 2,34 до 0,35. Когда  $h = 0,8 \text{ см}^{-1}$ , интервал отношения есть 1,33–0,23. Если источник располагается на большой глубине, то указанный интервал равен 0,26–0,057 и 0,11–0,025. Видно, с уменьшением  $\lambda$ ,  $a$ ,  $h$  величина  $\Delta B(\lambda)/B_0(\lambda)$  растет от малых значений до десятков процентов.

Закономерности функций  $\Delta B(\lambda)$  при разных условиях подобны между собой. Следует напомнить, что  $\Delta B(\lambda)$  пропорционально  $q$ .

**Влияние глубины залегания источника на распределение приращения яркости на поверхности.** Естественно, что по мере погружения источника в среду пятно излучения на поверхности расширяется. Оно определяется только свечением, создаваемым источником. Поэтому в дальнейшем будем анализировать лишь приращение яркости, которое на практике определяется как разность яркостей в точках  $r = 0$  и при большом  $r$ , где не сказывается присутствие источника. Рис. 2 иллюстрирует нормированное распределение приращения яркости на поверхности на примере цилиндра малых размеров при определенных свойствах среды. В данном случае цилиндр ведет себя как точечный источник и наблюдаемое распределение является функцией размытия изображения – основой для расчета изображения от источника любой формы. Видно, что уже на глубине 0,5 см источник на поверхности формирует достаточно размытую картину. Это свидетельствует об ограничениях термографических неинвазивных методик наблюдения.

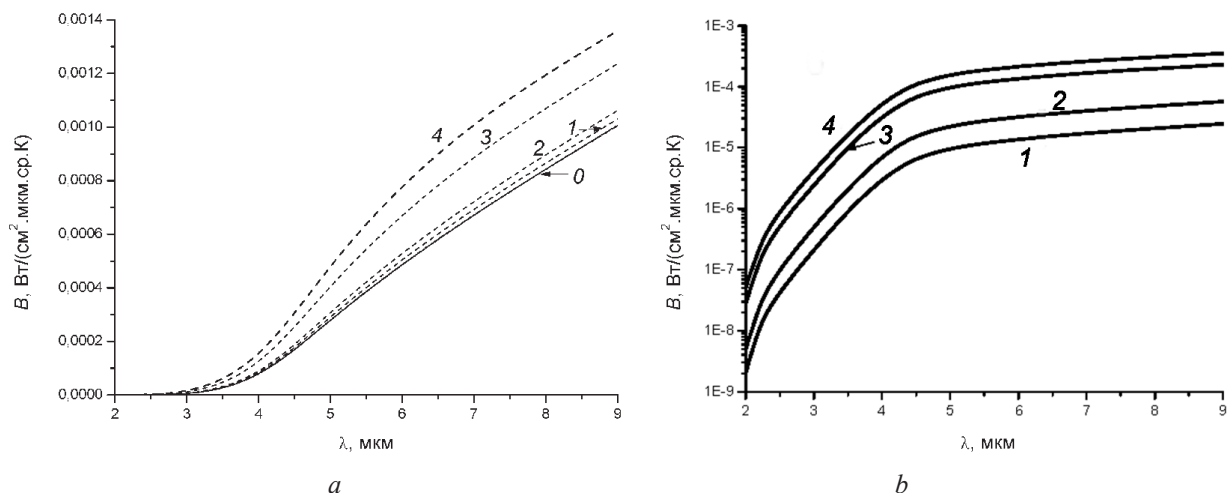


Рис. 1. Спектральное распределение яркости на поверхности кожи при  $q = 1 \text{ Вт/см}^3$ ,  $r = 0$ ,  $d = 1 \text{ см}$ ,  $z_0 = 0,2 \text{ см}$ :

$a$  – полная яркость;  $b$  – приращение яркости от источника. Цифры у кривых соответствуют разным значениям  $a$  в см и  $h$  в  $\text{см}^{-1}$ : 1 – 1,5 и 0,8; 2 – 1,5 и 0,05; 3 – 0,1 и 0,8; 4 – 0,1 и 0,05; 0 – источник отсутствует

Fig. 1. Spectral distribution of brightness on the skin surface at  $q = 1 \text{ W/cm}^3$ ,  $r = 0$ ,  $d = 1 \text{ cm}$ ,  $z_0 = 0.2 \text{ cm}$ :  $a$  – full brightness;  $b$  – increment of brightness from the source. The curves in this figure correspond to different values of  $a$  (cm) and  $h$  ( $\text{cm}^{-1}$ ):

1 – 1.5 and 0.8; 2 – 1.5 and 0.05; 3 – 0.1 and 0.8; 4 – 0.1 and 0.05; 0 – no source

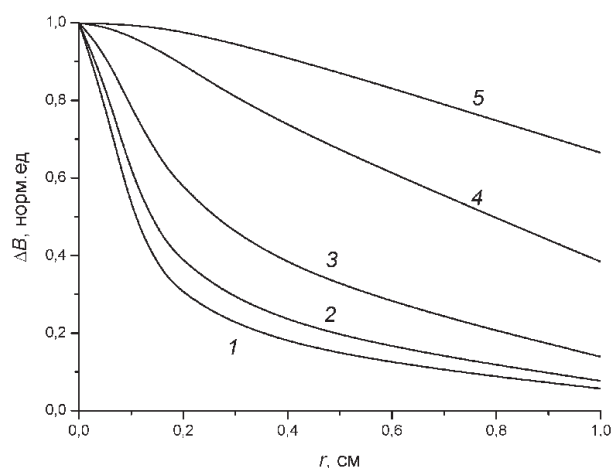


Рис. 2. Влияние  $a$  на распределение приращения яркости на поверхности кожи при  $q = 1 \text{ Вт/см}^3$ ,  $\lambda = 2,2 \text{ мкм}$ ,  $d = 0,1 \text{ см}$ ,  $z_0 = 0,1 \text{ см}$ ,  $h = 0,05 \text{ см}^{-1}$ . Цифры у кривых соответствуют разным значениям  $a$  в см: 1 – 0,05; 2 – 0,1; 3 – 0,2; 4 – 0,5; 5 – 1,0

Fig. 2. Effect of  $a$  on the brightness distribution increment on the skin surface at  $q = 1 \text{ W/cm}^3$ ,  $\lambda = 2.2 \text{ }\mu\text{m}$ ,  $d = 0.1 \text{ cm}$ ,  $z_0 = 0.1 \text{ cm}$ ,  $h = 0.05 \text{ cm}^{-1}$ . Here, the curves correspond to different values of  $a$  [cm]: 1 – 0.05; 2 – 0.1; 3 – 0.2; 4 – 0.5; 5 – 1.0



**Влияние показателя поглощения на распределение приращения яркости на поверхности.**

Согласно таблице,  $k$  сильно меняется по длинам волн. Это, как показывает рис. 3, *a*, приводит к трансформации нормированного распределения на поверхности. При этом если источник тепла находится на поверхности или на большой глубине, то влияние поглощения небольшое. Однако на средних глубинах, чем больше  $k$ , тем шире распределение излучения на поверхности. Несколько странные возрастающие значения  $k$  ткани были использованы нами, поскольку они соответствуют конкретным  $\lambda$ : 2,2; 2,1; 2,4; 5,0 мкм. Характерно, что влияние самой длины волны не существенно. То есть если при разных  $\lambda$  показатель поглощения одинаков (что наблюдается в действительности), то и нормированное приращение неизменное. Принципиально другая картина наблюдается при рассмотрении абсолютной величины  $\Delta B(\lambda)$  на рис. 3, *b*, когда  $r = 0$ . Данные представлены при разных  $a$ . Рост  $\Delta B$  на несколько порядков при изменении  $\lambda$  от 2 до 9 мкм в основном определяется величиной  $\lambda$ . Поглощение несущественно сказывается на величине приращения яркости. Относительный рост  $\Delta B$  замедляется с увеличением  $\lambda$ . Относительное падение приращения с углублением источника приблизительно одинаковое при разных длинах волн. Здесь уместно остановиться на полихромном приемнике. Расчет показывает, что для него нормализованное распределение приращения сигнала с поверхности описывается кривыми, близкими к кривым 4 на рис. 3. Если абсолютные значения электрических сигналов при  $\lambda = 2$  мкм приравнять приращениям яркости, то такие сигналы при разных  $a$  лягут на соответствующие кривые рис. 3, *b*. Это понятно, ибо при максимуме чувствительности приемника при  $\lambda = 9,5$  мкм показатель поглощения  $k = 585 \text{ см}^{-1}$ , когда поглощение не сильно влияет на нормированное распределение приращения яркости (сигнала).

**Влияние параметра теплоотдачи на распределение приращения яркости на поверхности.**

Как и в предыдущих двух случаях, рассмотрим источник малых размеров и проанализируем влияние  $h$  на  $\Delta B$ . На рис. 4, *a* построены нормированные значения  $\Delta B$  как функции  $r$  при разных параметрах теплоотдачи. Видно, что при росте теплоотдачи в окружающее пространство распределение яркости сужается, но незначительно. Абсолютные значения  $\Delta B$  при этом (рис. 4, *b*) в рассматриваемом, достаточно большом, интервале уменьшаются приблизительно на 20 %. Далее исследуем влияние размеров источника тепла на распределение  $\Delta B$ .

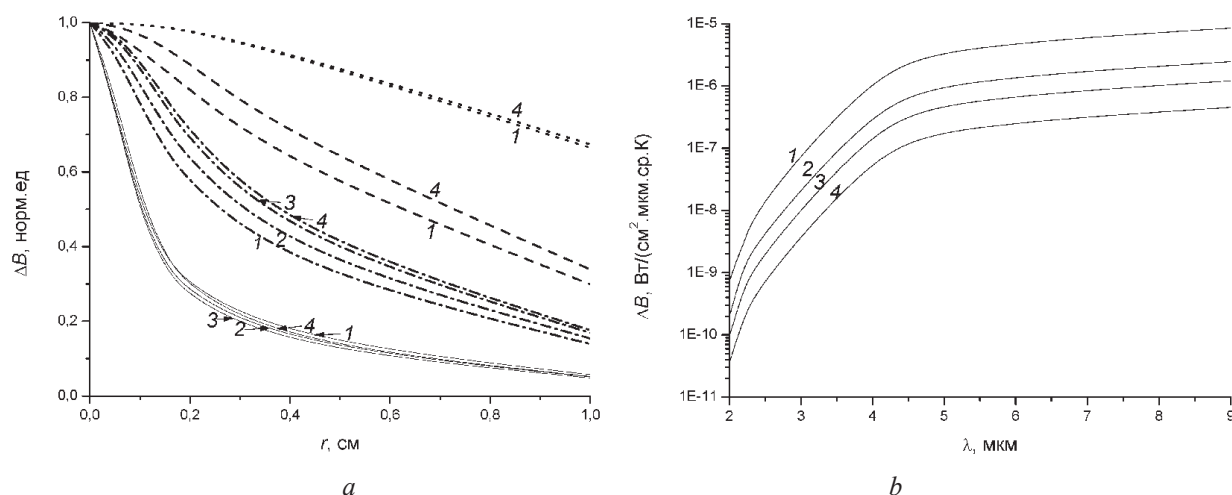


Рис. 3. Влияние показателя поглощения  $k$  (или  $\lambda$ ) на распределение приращения яркости на поверхности кожи при  $q = 1,0 \text{ Вт/см}^3$ ,  $\lambda = 2,2 \text{ мкм}$ ,  $d = 0,1 \text{ см}$ ,  $z_0 = 0,1 \text{ см}$ ,  $h = 0,05 \text{ см}^{-1}$ : *a* – нормированные значения  $\Delta B$ , сплошные линии соответствуют в см значению  $a = 0,05$ , пунктирные –  $0,2$ , прерывистые –  $0,4$ , точечные –  $1,0$  (цифры у кривых соответствуют разным значениям  $k$  в  $\text{см}^{-1}$ : 1 – 13,21; 2 – 21,52; 3 – 40,05; 4 – 240); *b* – абсолютные значения  $\Delta B$  при  $r = 0$  (цифры у кривых соответствуют разным значениям  $a$  в см: 1 – 0,05; 2 – 0,2; 3 – 0,4; 4 – 1,0)

Fig. 3. Brightness increment distribution on the skin surface vs. absorption index  $k$  (or  $\lambda$ ) at  $q = 1.0 \text{ W/cm}^3$ ,  $\lambda = 2.2 \text{ }\mu\text{m}$ ,  $d = 0.1 \text{ cm}$ ,  $z_0 = 0.1 \text{ cm}$ ,  $h = 0.05 \text{ cm}^{-1}$ . In (*a*) the normalized values of  $\Delta B$ , the solid lines correspond to  $a = 0.05 \text{ cm}$ , the dotted lines –  $0.2$ , the dashed lines –  $0.4$ , the dotted lines –  $1.0$ . The curves correspond to different value of  $k$  ( $\text{cm}^{-1}$ ): 1 – 13.21; 2 – 21.52; 3 – 40.05; 4 – 240. Absolute values of  $\Delta B$  at  $r = 0$  (*b*). Here, the curves correspond to different values of  $a$  (cm): 1 – 0.05; 2 – 0.2; 3 – 0.4; 4 – 1.0

**Влияние высоты цилиндра на распределение приращения яркости на поверхности.** До сих пор рассматривались случаи, когда размер источника был постоянным, имел определенное  $q$ , а следовательно, и тепловую мощность  $Q$ . Однако при варьировании размеров источника  $Q$  может не изменяться пропорционально его объему, а оставаться постоянным. Поэтому далее имеет смысл проводить одновременное исследование при постоянном  $q$  и  $Q$ . На рис. 5, *a* построено поверхностное распределение нормированной яркости при разных величинах анализируемого параметра (в данном случае  $z_0$ ), а на рис. 5, *b* – абсолютная яркость при  $r = 0$  как функция этого параметра. Поскольку в одной ситуации рассматривалось  $q = 1$  Вт/см<sup>3</sup>, то в другой (для возможности сравнения) бралось  $Q = qv$ , где  $v$  – минимальный объем цилиндра (рис. 5), имеющий  $d = 0,2$  см,  $z_0 = 0,1$  см и  $q = 1$  Вт/см<sup>3</sup>. Источник такого объема ведет себя как точечный.

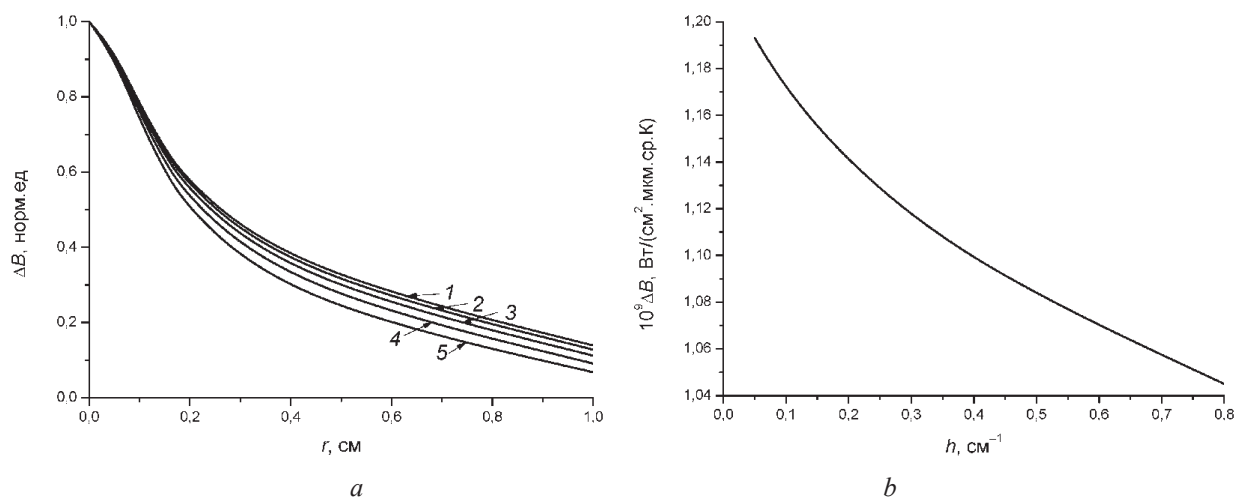


Рис. 4. Влияние параметра теплоотдачи  $h$  на распределение приращения яркости на поверхности кожи при  $q = 1$  Вт/см<sup>3</sup>,  $\lambda = 2,2$  мкм,  $d = 0,1$  см,  $z_0 = 0,1$  см,  $a = 0,2$  см. Цифры у кривых соответствуют разным значениям  $h$  в см<sup>-1</sup>: 1 – 0,05; 2 – 0,1; 3 – 0,2; 4 – 0,4; 5 – 0,8 (*a* – нормированные значения  $\Delta B$ ; *b* – абсолютные при  $r = 0$ )

Fig. 4. Influence of the heat transfer parameter  $h$  on the brightness increment distribution on the skin surface at  $q = 1$  W/cm<sup>3</sup>,  $\lambda = 2.2$   $\mu$ m,  $d = 0.1$  cm,  $z_0 = 0.1$  cm,  $h = 0.2$  cm<sup>-1</sup>. The curves in this figure correspond to different values of  $h$  (cm<sup>-1</sup>): 1 – 0.05; 2 – 0.1; 3 – 0.2; 4 – 0.4; 5 – 0.8. Normalized values of  $\Delta B$  (*a*); absolute values of  $\Delta B$  at  $r = 0$  (*b*)

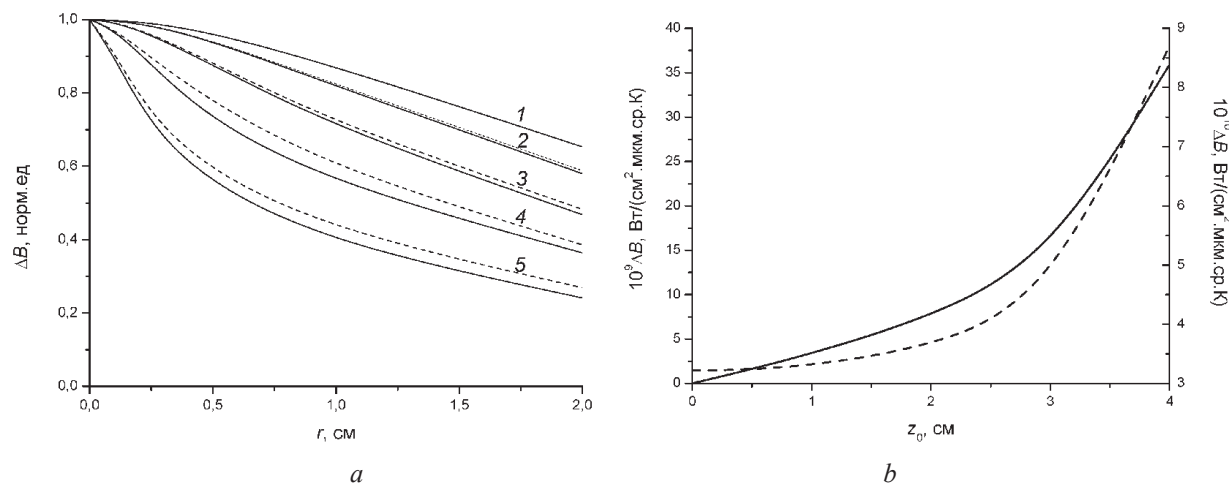


Рис. 5. Влияние высоты цилиндра  $z_0$  на распределение приращения яркости на поверхности кожи при  $\lambda = 2,2$  мкм,  $h = 0,05$  см<sup>-1</sup>,  $a = 2,0$  см,  $d = 0,2$  см. Цифры у кривых соответствуют разным значениям  $z_0$  в см: 1 – 0,1; 2 – 2,0; 3 – 3,0; 4 – 3,5; 5 – 4,0. Сплошные линии соответствуют  $q = 1$  Вт/см<sup>3</sup>, прерывистые –  $Q = 3,142 \cdot 10^{-3}$  (*a* – нормированные значения  $\Delta B$ ; *b* – абсолютные при  $r = 0$ )

Fig. 5. Influence the cylinder height  $z_0$  on the brightness increment distribution on the skin surface at  $\lambda = 2.2$   $\mu$ m,  $h = 0.05$  cm<sup>-1</sup>,  $a = 2.0$  cm,  $d = 0.2$  cm. Different values of  $z_0$  (cm) correspond to the values: 1 – 0.1; 2 – 2.0; 3 – 3.0; 4 – 3.5; 5 – 4.0. The solid lines correspond to  $q = 1$  W/cm<sup>3</sup>, the dashed lines –  $Q = 3.142 \cdot 10^{-3}$ . The normalized values of  $\Delta B$  (*a*), the absolute values of  $\Delta B$  at  $r = 0$  (*b*)



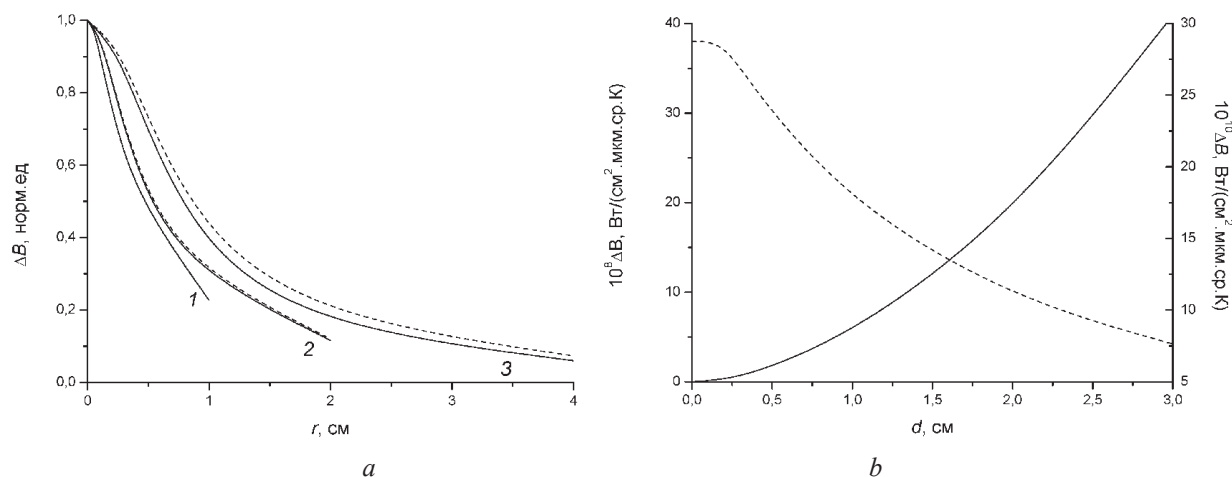


Рис. 6. Влияние диаметра  $d$  на распределение приращения яркости на поверхности кожи при  $\lambda = 2,2$  мкм,  $h = 0,05$  см<sup>-1</sup>,  $a = 0,3$  см,  $z_0 = 0,1$  см. Цифры у кривых соответствуют разным значениям  $d$  в см: 1 – 0,2; 2 – 0,4; 3 – 1,0.

Сплошные линии соответствуют  $q = 1$  Вт/см<sup>3</sup>, прерывистые –  $Q = 3,142 \cdot 10^{-3}$  (a – нормированные значения  $\Delta B$ , b – абсолютные при  $r = 0$ )

Fig. 6. Effect of the diameter  $d$  on the brightness increment distribution on the skin surface at  $\lambda = 2.2$  μm,  $h = 0.05$  cm<sup>-1</sup>,  $a = 0.3$  cm,  $z_0 = 0.1$  cm. The figures at the curves correspond to different values of  $d$  (cm): 1 is 0.2; 2 is 0.4; 3 is 1.0.

The solid lines correspond to  $q = 1$  W/cm<sup>3</sup>, the dashed curves correspond to  $Q = 3.142 \cdot 10^{-3}$  (a – normalized values of  $\Delta B$ , b – absolute values of  $\Delta B$  at  $r = 0$ )

Из рис. 5, а видно, что по мере увеличения высоты цилиндра поверхностное распределение яркости «заостряется». Это связано с тем, что к поверхности среды приближается торцевая часть цилиндра, несущая, вследствие сильного поглощения, основную часть излучения. При каждом  $z_0$  кривая для постоянного  $q$  всегда несколько выше, чем для постоянного  $Q$ , если источник практически неточечный. Указанные различия увеличиваются при росте  $z_0$ . На рис. 5, b шкала ординат, с точностью до множителя, при постоянном  $q$  – левая, при постоянном  $Q$  – правая. В целом происходит рост  $\Delta B$  с увеличением высоты цилиндра. Естественно, что, если  $Q$  постоянно, то кривая для него при малых  $z_0$  будет выше, чем для постоянного  $q$ . Когда  $z_0$  велико, то наблюдается обратная картина.

#### Влияние диаметра цилиндра на распределение приращения яркости на поверхности.

Рассмотрим ситуацию, когда у источника постоянное  $z_0$ , а диаметр изменяется (рис. 6). На рис. 6, а видно, как расширяется распределение приращения яркости источника с увеличением его диаметра. При  $d = 0,2$  см источник ведет себя как точечный, поэтому распределение яркости описывается одной кривой. С увеличением  $d$  кривая, соответствующая постоянному  $q$ , располагается несколько ниже, чем кривая, соответствующая постоянному  $Q$ . На рис. 6, b шкала ординат, с точностью до множителя, при постоянном  $q$  – левая, при постоянном  $Q$  – правая. Таким образом, можно видеть естественный рост  $\Delta B$  при постоянном  $q$  и его падение при постоянном  $Q$ .

**Благодарности.** Автор выражает глубокую благодарность В. В. Баруну за участие в разработке программы расчетов и обсуждение результатов.

**Acknowledgements.** The author is very grateful to V. V. Barun for participation in developing computation programs and in discussing the obtained results.

#### Список использованных источников

1. Draper, J. W. The calculation of skin temperature distribution in thermography / J. W. Draper, J. W. Boag // Phys. Med. Biol. – 1971. – Vol. 16, № 2. – P. 201–211. <https://doi.org/10.1088/0031-9155/16/2/301>
2. Gustafsson, S. E. Analytical calculation of the skin temperature distribution due to subcutaneous heat production in a spherical heat source (relevant to thermography) / S. E. Gustafsson, S. K. Nilsson, L. M. Torell // Phys. Med. Biol. – 1975. – Vol. 20, № 2. – P. 219–224. <https://doi.org/10.1088/0031-9155/20/2/003>
3. Barun, V. V. Thermal action of a short light pulse on biological tissues / V. V. Barun, A. P. Ivanov // Int. J. Heat Mass Transfer. – 2003. – Vol. 46, № 17. – P. 3243–3254. [https://doi.org/10.1016/s0017-9310\(03\)00124-8](https://doi.org/10.1016/s0017-9310(03)00124-8)
4. Hale, G. M. Optical constants of water in the 200 nm to 200 μm wavelength region / G. M. Hale, M. R. Querry // Appl. Opt. – 1973. – Vol. 12, № 3, pp. 555–563. <https://doi.org/10.1364/ao.12.000555>
5. Карслоу, Г. Теплопроводность твердых тел: пер. с англ. / Г. Карслоу, Д. Егер. – М.: Наука, 1964. – 488 с.

6. Госсорг, Ж. Инфракрасная термография. Основы, техника, применение: пер. с фр. / Ж. Госсорг. – М.: Мир, 1988. – 416 с.
7. Фоторезисторы с кодом Грея из гетероэпитаксиальных структур  $\text{Cd}_x\text{Hg}_{1-x}\text{Te}$  на спектральный диапазон 2–11 мкм с термоэлектрическим охлаждением / А. В. Филатов [и др.] // Успехи прикладной физики. – 2015. – Т. 3, № 2. – С. 190–195.

## References

1. Draper J. W., Boag J. W. The calculation of skin temperature distribution in thermography. *Physics in Medicine and Biology*, 1971, vol. 16, no. 2, pp. 201–211. <https://doi.org/10.1088/0031-9155/16/2/301>
2. Gustafsson S. E., Nilsson S. K., Torell L. M. Analytical calculation of the skin temperature distribution due to subcutaneous heat production in a spherical heat source (relevant to thermography). *Physics in Medicine and Biology*, 1975, vol. 20, no. 2, pp. 219–224. <https://doi.org/10.1088/0031-9155/20/2/003>
3. Barun V. V., Ivanov A. P. Thermal action of a short light pulse on biological tissues. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2003, vol. 46, no. 17, pp. 3243–3254. [https://doi.org/10.1016/s0017-9310\(03\)00124-8](https://doi.org/10.1016/s0017-9310(03)00124-8)
4. Hale G. M., Querry M. R. Optical constants of water in the 200 nm to 200 um wavelength region. *Applied Optics*, 1973, vol. 12, no. 3, pp. 555–563. <https://doi.org/10.1364/ao.12.000555>
5. Carslaw H. S., Jaeger J. C. *Conduction of Heat in Solids*. 2nd ed. Oxford, Clarendon Press, 1959. 510 p.
6. Gaussorgues G. La Thermographie Infrarouge. Principes-TechnologieApplications. 4 Ed. Paris, Lavoisier, 1999. 586 p. (Russ. Ed.: Gossorg Zh. *Infrakrasnaya termografiya. Osnovy, tekhnika, primeneniye* [Gossorg J. Infrared thermography. Fundamentals, techniques, application]. Moscow, Mir Publ., 1988. 452 p.). (in France).
7. Filatov A. V., Karpov V. V., Susov E. V., Gribanov A. A., Kuznetsov N. S., Petrenko V. I. Photoresistors with a Gray code from heteroepitaxial structures  $\text{Cd}_x\text{Hg}_{1-x}\text{Te}$  on the 2–11  $\mu\text{m}$  spectral range with thermoelectric cooling. *Uspekhi prikladnoi fiziki = Advances in Applied Physics*, 2015, vol. 3, no. 2, pp. 190–195 (in Russian).

## Информация об авторе

**Иванов Аркадий Петрович** – член-корреспондент, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68-2, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: [ivanovap@dragon.bas-net.by](mailto:ivanovap@dragon.bas-net.by)

## Information about the author

**Arkady P. Ivanov** – Corresponding Member, D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Senior Researcher, B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68-2, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [ivanovap@dragon.bas-net.by](mailto:ivanovap@dragon.bas-net.by)